# Stabilisation des équations d'évolution du second ordre avec retard

Julie VALEIN, en collaboration avec Emilia FRIDMAN, Serge NICAISE et Cristina PIGNOTTI

Institut Elie Cartan de Nancy

19 septembre 2012

# Objectif

Etudier le système d'évolution du 2nd ordre suivant

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) + B_2 B_2^* \dot{\omega}(t - \tau(t)) = 0, \ t > 0, \\ \omega(0) = \omega_0, \ \dot{\omega}(0) = \omega_1, \\ B_2^* \dot{\omega}(t - \tau(0)) = f^0(t - \tau(0)), \ 0 < t < \tau(0), \end{cases} \tag{1}$$

En absence de retard (i.e. $B_2 = 0$), l'équation abstraite du second ordre a été étudié dans [Ammari-Tucsnak, 2001].

Nous allons distinguer 2 cas :

- Retard constant: $\tau(t) = \tau$
- Retard évoluant au cours du temps.

# Motivation

## Stabilisation

Atténuer les vibrations par rétro-action (feedback) et garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.

## Différents degrés de stabilité

- Stabilité forte : $E(t) \to 0, \quad$ lorsque $t \to +\infty$.
- Stabilité exponentielle : $E(t) \leq Ce^{-\nu t}E(0), \quad \forall t > 0$.
- Stabilité polynomiale : $E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}} E_{\alpha}(0), \quad \forall t > 0$.

# Plan

1. Retard constant
   - Le problème
   - Existence, unicité
   - Stabilité forte
   - Stabilité exponentielle, polynomiale
   - Exemples
2. Retard dépendant du temps
   - Le problème
   - La principale difficulté
   - Problème bien posé
   - Stabilité
   - Exemples
3. Conclusion et problèmes ouverts

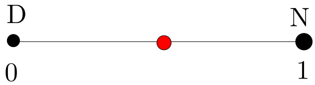
# Le problème

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) + B_2 B_2^* \dot{\omega}(t-\tau) = 0, \ t > 0, \\ \omega(0) = \omega_0, \ \dot{\omega}(0) = \omega_1, \\ B_2^* \dot{\omega}(t-\tau) = f^0(t-\tau), \ 0 < t < \tau, \end{cases} \tag{2}$$

où

- $\omega : [0, \infty) \to H$ est l'état du système, $H$ un espace de Hilbert,
- $\tau > 0$ est le retard,
- $A : D(A) \to H$ est un opérateur positif, auto-adjoint avec inverse compact dans $H$,
- $U_1$, $U_2$ sont des espaces de Hilbert (identifiés à leur dual) et $B_i \in \mathcal{L}(U_i, D(A^{1/2})')$, $i = 1, 2$. Notons $V = D(A^{1/2})$.

# Motivation




Vibration d'une corde élastique de longueur 1 amortie en un point intérieur.

## Exemple type : l'équation des ondes dissipée en $\xi \in (0,1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}(x,\ t) - \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}(x,\ t) + \alpha_1 \frac{\partial\omega}{\partial t}(\xi,\ t)\delta_\xi + \alpha_2 \frac{\partial\omega}{\partial t}(\xi,\ t-\tau)\delta_\xi = 0, \\ \omega(0,\ t) = \frac{\partial\omega}{\partial x}(1,\ t) = 0, \\ \omega(x,\ 0) = \omega_0(x),\ \frac{\partial\omega}{\partial t}(x,\ 0) = \omega_1(x), \\ \frac{\partial\omega}{\partial t}(\xi,\ t-\tau) = f^0(t-\tau),\ 0 < t < \tau, \end{cases}$$

Ici :

- $A : D(A) \to H,\ \varphi \mapsto -\frac{d^2}{dx^2}\varphi$ avec $H = L^2(0,1)$, $D(A) = \{\varphi \in H^2(0,1) \cap V;\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(1) = 0\}$, et $V = \{\varphi \in H^1(0,1);\ \varphi(0) = 0\}$,
- Pour $i = 1,2,\ U_i = \mathbb{R},\ B_i : U_i \to V',\ k \mapsto \sqrt{\alpha_i}\, k\, \delta_\xi$ et donc $B_i^*(\varphi) = \sqrt{\alpha_i}\varphi(\xi)$ pour $\varphi \in V$.

# Exemple type 2 : l'équation des ondes dissipée en $\xi \in (0,1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}(x,\ t) - \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}(x,\ t) + \alpha_1 \frac{\partial\omega}{\partial t}(\xi,\ t)\delta_\xi + \alpha_2 \frac{\partial\omega}{\partial t}(\xi,\ t-\tau)\delta_\xi = 0, \\ \omega(0,\ t) = \omega(1,\ t) = 0, \\ \omega(x,\ 0) = \omega_0(x),\ \frac{\partial\omega}{\partial t}(x,\ 0) = \omega_1(x), \\ \frac{\partial\omega}{\partial t}(\xi,\ t-\tau) = f^0(t-\tau),\ \ 0 < t < \tau, \end{cases}$$

Ici :

- $A : D(A) \to H,\ \varphi \mapsto -\frac{d^2}{dx^2}\varphi$ avec $H = L^2(0,1)$, $D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ et $V = H_0^1(0,1)$,
- Pour $i = 1, 2,\ U_i = \mathbb{R},\ B_i : U_i \to V',\ k \mapsto \sqrt{\alpha_i}\, k\, \delta_\xi$ et donc $B_i^*(\varphi) = \sqrt{\alpha_i}\varphi(\xi)$ pour $\varphi \in V$.

Dans notre exemple,

- si $\alpha_1 = 0$, le système est instable [Dakto-Lagnese-Polis, 1986],
- si $\alpha_2 > \alpha_1$, des instabilités peuvent survenir [Nicaise-Pignotti, 2006, Nicaise-V., 2007].

On doit donc imposer des conditions sur $B_1$ et $B_2$ pour stabiliser le système :

**Condition entre $B_1$ et $B_2$**

On suppose

$$\exists\, 0 < \alpha \leq 1, \forall u \in V, \ \|B_2^* u\|_{U_2}^2 \leq \alpha \, \|B_1^* u\|_{U_1}^2. \tag{3}$$

<u>Exemple type</u> : $\alpha_2 \leq \alpha_1$.

# Transformation du système

On pose $z(\rho, t) = B_2^* \dot{\omega}(t - \tau\rho)$ pour $\rho \in (0, 1)$ et $t > 0$. Le système (2) est équivalent à

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) + B_2 z(1, t) = 0, \; t > 0, \\ \tau \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, \; t > 0, \; 0 < \rho < 1, \\ \omega(0) = \omega_0, \; \dot{\omega}(0) = \omega_1, \; z(\rho, 0) = f^0(-\tau\rho), \; 0 < \rho < 1, \\ z(0, t) = B_2^* \dot{\omega}(t), \; t > 0. \end{cases}$$

Si on pose

$$U = (\omega, \dot{\omega}, z)^T,$$

alors $U$ satisfait

$$U' = (\dot{\omega}, \ddot{\omega}, \dot{z})^T = \left( \dot{\omega}, -A\omega(t) - B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) - B_2 z(1, t), -\frac{1}{\tau} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^T.$$

# Système du 1er ordre

Le système (2) peut se réécrire comme

$$\left\{\begin{array}{l} U'(t) = \mathcal{A}U(t) \\ U(0) = (\omega_0,\, \omega_1,\, f^0(-\tau .)), \end{array}\right. \tag{4}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} \omega \\ u \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -A\omega - B_1 B_1^* u - B_2 z(1) \\ -\frac{1}{\tau}\frac{\partial z}{\partial \rho} \end{pmatrix},$$

avec domaine
$D(\mathcal{A}) = \left\{(\omega,\, u,\, z) \in V \times V \times H^1((0,\, 1),\, U_2);\, z(0) = B_2^* u,\right.$
$\left. A\omega + B_1 B_1^* u + B_2 z(1) \in H\right\}$. On introduit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = V \times H \times L^2((0,\, 1),\, U_2).$$

# Problème bien posé

On montre que $\mathcal{A}$ génère un $C_0$ semi-groupe sur $\mathcal{H}$.

**Théorème (Nicaise, V. 2010)**

*Pour toute donnée initiale $U_0 \in \mathcal{H}$, il existe une unique solution $U \in C([0,+\infty),\mathcal{H})$ du problème (4).*
*De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors*

$$U \in C([0,+\infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,+\infty),\mathcal{H}).$$

Preuve:
Par le théorème de Lumer-Phillips, il suffit de montrer que

- $\mathcal{A}$ est dissipatif, ie $\forall U \in D(\mathcal{A}), \langle \mathcal{A}U,\ U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$,
- $\forall \lambda > 0, \lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.

# Energie

Supposons

$$\exists\, 0 < \alpha < 1,\ \forall u \in V,\ \|B_2^* u\|_{U_2}^2 \leq \alpha \|B_1^* u\|_{U_1}^2 . \qquad (5)$$

On définit l'énergie comme

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}\omega\right\|_H^2 + \|\dot{\omega}\|_H^2 + q\tau \int_0^1 \|B_2^*\dot{\omega}(t-\tau\rho)\|_{U_2}^2\, d\rho\right),$$

où $q > 0$ vérifie $1 < q < \frac{2}{\alpha} - 1$.

## Proposition

*Pour toute solution régulière du pb (2), l'énergie est décroissante et* $E'(t) \sim -\left(\|B_1^*\dot{\omega}(t)\|_{U_1}^2 + \|B_2^*\dot{\omega}(t-\tau)\|_{U_2}^2\right)$.

<u>Exemple type</u> : (5) est équivalent à $\alpha_2 < \alpha_1$.

# Résultat de stabilité forte [Nicaise, V. 2010]

## Proposition

*Supposons (5). Alors, pour toute donnée initiale dans $\mathcal{H}$, $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$ si et seulement si pour tout vecteur propre (non nul) $\varphi \in D(A)$ de $A$, on a*

$$B_1^*\varphi \neq 0. \tag{6}$$

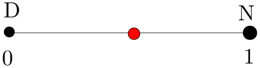
Preuve: $\Leftarrow$ : On suit [Tucsnak-Weiss, 2003].
$\Rightarrow$ : Si $\varphi \in D(A)$ vecteur propre de $A$ de valeur propre $\lambda^2$ tel que $B_1^*\varphi = 0$, alors $u(.,t) = \varphi\cos(\lambda t)$ est solution du pb (2) et $E(t) = E(0)$.

## Remarque

*Cette CNS est la même que celle dans le cas sans retard (ie $B_2 = 0$) [Tucsnak-Weiss, 2003].*

# Exemples types

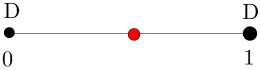
1)




Les vecteurs propres sont $\varphi_k(x) = \sin(\frac{2k+1}{2}\pi x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc

$$(6) \Leftrightarrow \xi \neq \frac{2m}{2k+1}, \ \forall m, \ k \in \mathbb{N}.$$

2)




Les vecteurs propres sont $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Donc

$$(6) \Leftrightarrow \xi \notin \mathbb{Q}.$$

# Décomposition

La stabilité de (2) est basée sur une inégalité d'observabilité pour le système conservatif associé. On décompose $\omega$ solution de (2) en

$$\omega = \phi + \psi, \tag{7}$$

où $\phi$ est solution du problème conservatif

$$\begin{cases} \ddot{\phi}(t) + A\phi(t) = 0 \\ \phi(0) = \omega_0,\ \dot{\phi}(0) = \omega_1, \end{cases} \tag{8}$$

et $\psi$ satisfait

$$\begin{cases} \ddot{\psi}(t) + A\psi(t) = -B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) - B_2 B_2^* \dot{\omega}(t-\tau) = Bv(t), \\ \psi(0) = 0,\ \dot{\psi}(0) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

avec
$v(t) = (-B_1^* \dot{\omega}(t), -B_2^* \dot{\omega}(t-\tau))^T$, $B = (B_1\ B_2) \in \mathcal{L}(V, U_1 \times U_2)$.

# Estimée a priori

## Résultat de [Ammari-Tucsnak, 2001]

L'hypothèse (H): "Si $\beta > 0$ est fixé et $C_\beta = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \Re\lambda = \beta\}$, la fonction $\lambda \in C_\beta \to H(\lambda) = \lambda B^*(\lambda^2 I + A)^{-1} B \in \mathcal{L}(U)$ est bornée", est équivalente à $B^*\psi \in H^1(0, T; U)$ et
$\exists\, C > 0, \; \|(B^*\psi)'(.)\|_{L^2(0,T;U)} \leq Ce^{\beta T} \|v\|_{L^2(0,T;U)} .$

## Lemme

*Si (H) est vérifiée pour $B = (B_1\, B_2)$, $U = U_1 \times U_2$, les solutions $\omega$ de (2) et $\phi$ de (8) satisfont*

$$\int_0^T \|(B_1^*\phi)'(t)\|_{U_1}^2\, dt \leq Ce^{2\beta T} \int_0^T (\|B_1^*\dot\omega(t)\|_{U_1}^2 + \|B_2^*\dot\omega(t-\tau)\|_{U_2}^2) dt,$$

*avec $C > 0$ indépendant de $T$.*

# Résultat de stabilité

**Théorème (Nicaise, V. 2010)**

*Supposons (5) et (H) pour $B = (B_1\ B_2)$, $U = U_1 \times U_2$. Si $\exists\ T > 0,\ C > 0$ tels que l'estimée d'observabilité*

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} \omega_0 \right\|_H^2 + \|\omega_1\|_H^2 \leq C \int_0^T \|(B_1^* \phi)'(t)\|_{U_1}^2 \, dt \tag{10}$$

*est vérifiée, où $\phi$ est solution de (8), alors (2) est exponentiellement stable dans l'espace d'énergie.*

**Remarque**

*1) La condition suffisante est la même que celle dans le cas sans retard [Ammari-Tucsnak, 2001].*
*2) $E(t) \leq CE(0)e^{-\nu t}$, où $\nu < \frac{1}{\tau} \ln(1 + C' e^{-2\beta\tau})$ et $C'$ indépendant de $\tau$.*

# CNS pour obtenir l'inégalité d'observabilité

**Proposition**

*Supposons que les valeurs propres* $(\lambda_k)$ *de* $A^{1/2}$ *sont simples et vérifient la condition du gap standard :*
$\exists\,\gamma_0 > 0,\ \forall k \geq 1,\ \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \gamma_0$. *Alors (10) est équivalente à*

$$\exists\,\gamma > 0,\ \forall k \geq 1,\ \|B_1^*\varphi_k\|_{U_1} \geq \gamma.$$

Preuve : Par l'inégalité d'Ingham

# Méthodologie

Pour obtenir cette inégalité d'observabilité, on utilise

## Théorème (Beurling)

*Soit* $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *une suite strictement croissante de réels vérifiant*

$$\exists \gamma' > 0 \quad \text{tel que :} \quad \lambda_{m+1} - \lambda_m \;\geq\; \gamma' \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

*On suppose de plus qu'il existe* $\gamma \geq \gamma'$ *et* $M \in \mathbb{N}^*$ *tels que*

$$\lambda_{m+M} - \lambda_m \;\geq\; \gamma M, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

*Alors, pour tout intervalle* $I$ *de longueur* $\ell(I) > \dfrac{2\pi}{\gamma}$*, il existe* $\delta > 0$ *ne dépendant que de* $\gamma, \gamma', M$ *et* $I$ *tel que pour toute suite* $(a_m) \in \ell^2(\mathbb{C})$*:*

$$\int_I \left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \, e^{i\lambda_m t} \right|^2 dt \geq \delta \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2.$$

# Exemples

## Exemple type 1

On suppose $\alpha_2 < \alpha_1$. (H) est vérifiée par [Ammari-Henrot-Tucsnak, 2001]. De plus, $\|B_1^*\varphi_k\|_{U_1} = \sqrt{\alpha_1}\left|\sin((k+\frac{1}{2})\pi\xi)\right| > \gamma \Leftrightarrow \xi = \frac{p}{q}$ où $p$ impair.

## Exemple type 2

Ici $\|B_1^*\varphi_k\|_{U_1} = \sqrt{\alpha_1}\,|\sin(k\pi\xi)| \geq \alpha > 0$ est impossible. En effet, cela voudrait dire que $|k\pi\xi - m\pi| \geq \beta$ pour tout $k, m \in \mathbb{Z}$. Par contre, pour $\xi \in \mathcal{S}$ (qui contient les irrationnels quadratiques), $|k\pi\xi - m\pi| \geq \frac{\beta}{k}$ et c'est le meilleur que l'on puisse obtenir. Nous n'aurons pas une décroissance exponentielle mais polynomiale.

# Stabilité polynomiale. Hypothèse

Comme $(\omega_0, \omega_1, f^0(-\tau.)) \in D(\mathcal{A}) \not\Rightarrow \omega_0 \in D(A)$, on ne peut pas appliquer les inégalités d'interpolation standard. On suppose donc

## Hypothèse

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $(\omega_0,\, \omega_1,\, f^0(-\tau.)) \in D(\mathcal{A})$,

$$\|\omega_0\|_V^{m+1} \leq C \left\|(\omega_0,\, \omega_1,\, f^0(-\tau.))\right\|_{D(\mathcal{A})}^{m} \|\omega_0\|_{D(A^{\frac{1-m}{2}})}. \tag{11}$$

# Résultat de stabilité

## Théorème (Nicaise, V. 2010)

*Soit $\omega$ solution de (2) avec $(\omega_0, \omega_1, f^0(-\tau\cdot)) \in D(\mathcal{A})$. Supposons (5), (H) et (11). Si il existe $m > 0$, $T > 0$ et $C > 0$ tels que*

$$\int_0^T \left\|(B_1^*\phi)'(t)\right\|_{U_1}^2 dt \geq C\left(\|\omega_0\|^2_{D(A^{\frac{1-m}{2}})} + \|\omega_1\|^2_{D(A^{-\frac{m}{2}})}\right) \quad (12)$$

*où $\phi$ solution de (8), alors l'énergie décroit polynomialement, i.e., il existe $C > 0$ dpdt de $m$ et $\tau$ tel que, pour toute d.i. dans $D(\mathcal{A})$,*

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{m}}} \left\|(\omega_0, \omega_1, f^0(-\tau\cdot))\right\|^2_{D(\mathcal{A})}, \forall t > 0.$$

Remarque : $C > \left(\frac{4e^{2\beta\tau}}{mK'}\right)^{\frac{1}{m}} (1+\tau)^{\frac{1}{m}}$.

# CNS pour obtenir l'inégalité d'observabilité

## Proposition

*Supposons que les valeurs propres* $(\lambda_k)$ *de* $A^{1/2}$ *sont simples et vérifient la condition du gap standard:*
$\exists\, \gamma_0 > 0, \forall k \geq 1, \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \gamma_0.$ *Alors (12) est équivalente à*

$$\exists\, \gamma > 0, \forall k \geq 1, \|B_1^* \varphi_k\|_{U_1} \geq \frac{\gamma}{\lambda_k^m}.$$

Preuve: Par l'inégalité d'Ingham.

## Exemple type 2

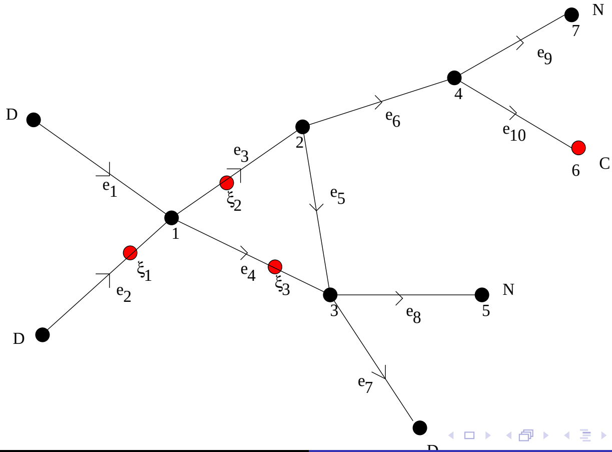
On suppose $\alpha_2 < \alpha_1$. (H) est vérifiée par [Ammari-Tucsnak, 2001] et (11) par [Nicaise-V., 2007]. De plus, $\|B_1^* \varphi_k\|_{U_1} = |\sin(k\pi\xi)| > \frac{\gamma}{k}$ si $\xi \in \mathcal{S}$. On obtient une décroissance polynomiale en $\frac{1}{1+t}$.

# Motivation

Analyser et stabiliser les vibrations de structure mécanique de cordes flexibles

# Les réseaux

Dans cette partie, nous nous intéressons aux vibrations de cordes élastiques en réseaux:



# Le système

$$\left\{\begin{array}{ll}
\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \text{dans } e_j \times \mathbb{R}^+, 1 \leq j \leq N, \\
\sum_{j\in\mathcal{E}_v} \frac{\partial u_j}{\partial n_j}(v,t) = -\alpha_1^{(v)} \frac{\partial u}{\partial t}(v,t) - \alpha_2^{(v)} \frac{\partial u}{\partial t}(v,t-\tau) & \forall v \in \mathcal{V}_c, t>0, \\
u_j(v,t) = u_k(v,t) = u(v,t) & \forall j,k \in \mathcal{E}_v, v \in \mathcal{V}_{int}, t>0, \\
\sum_{j\in\mathcal{E}_v} \frac{\partial u_j}{\partial n_j}(v,t) = 0 & \forall v \in \mathcal{V}_{int} \backslash \mathcal{V}_{int}^c, t>0, \\
u_{j_v}(v,t) = 0 & \forall v \in \mathcal{D}, t>0, \\
\frac{\partial u_{j_v}}{\partial n_{j_v}}(v,t) = 0 & \forall v \in \mathcal{N}, t>0, \\
u(t=0) = u^{(0)}, \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u^{(1)} & \\
\frac{\partial u}{\partial t}(v,t-\tau) = f_v^0(t-\tau) & \forall v \in \mathcal{V}_c, 0<t<\tau.
\end{array}\right.$$

On suppose

$$\forall v \in \mathcal{V}_c,\ \alpha_2^{(v)} < \alpha_1^{(v)}, \quad \tau > 0.$$

Le gap n'est pas vérifié en général, mais le gap généralisé l'est :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_{n+N+1} - \lambda_n \geq \gamma_0 (N+1).$$

# Résultats : gap simple, valeurs propres simples

(H) et (11) sont vérifiées [Nicaise-V., 2007]. On suppose que les valeurs propres associées au problème conservatif sont simples et que le gap simple est vérifié

$$\forall k \geq 1,\ \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \gamma_0.$$

Nous avons les résultats suivants:

- $\lim\limits_{t\to\infty} E(t) = 0 \Leftrightarrow \forall k \geq 1,\ \sum\limits_{v\in\mathcal{V}_c} |\varphi_k(v)|^2 \neq 0,$
- l'énergie décroît exponentiellement si $\forall k \geq 1,\ \sum\limits_{v\in\mathcal{V}_c} |\varphi_k(v)|^2 \geq \alpha > 0,$
- si il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \geq 1,\ \sum\limits_{v\in\mathcal{V}_c} |\varphi_k(v)|^2 \geq \frac{\alpha}{\lambda_k^{2m}}$, alors l'énergie décroît de manière polynomiale en $\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{m}}}$.

# Résultats : gap simple, valeurs propres multiples

(H) et (11) sont vérifiés. On note $l_k$ la multiplicité de la valeur propre $\lambda_k$ associée au problème conservatif, $\{\varphi_{k,i}\}_{1\leq i\leq l_k}$ les vecteurs propres associés à $\lambda_k$ et pour $k \geq 1$, $v \in \mathcal{V}_c$, on pose

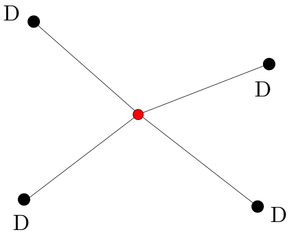
$$\mathcal{M}_v(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \varphi_{k,1}^2(v) & \dots & \varphi_{k,1}(v)\varphi_{k,l_k}(v) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{k,1}(v)\varphi_{k,l_k}(v) & \cdots & \varphi_{k,l_k}^2(v) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\mathcal{M}(\lambda_k) = \sum_{v\in\mathcal{V}_c} \mathcal{M}_v(\lambda_k).$$

Nous avons les résultats suivants:

- $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0 \Leftrightarrow \forall k \geq 1,\ \lambda_{min}(\mathcal{M}(\lambda_k)) \neq 0$,
- l'énergie décroit exponentiellement si $\forall k \geq 1,\ \lambda_{min}(\mathcal{M}(\lambda_k)) \geq \alpha > 0$,
- si il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \geq 1,\ \lambda_{min}(\mathcal{M}(\lambda_k)) \geq \frac{\alpha}{\lambda_k^{2m}}$, alors l'énergie décroit de manière polynomiale en $\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{m}}}$.

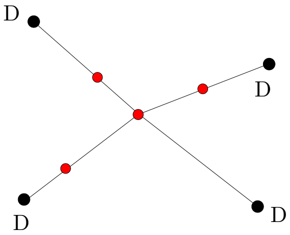
# Exemples




Si $\forall j \neq i$, $\frac{l_j}{l_i} \notin \mathbb{Q}$, $\lim E(t) = 0$.

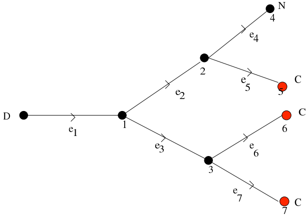
Si $\forall j$, $l_j = 1$, $\lim E(t) \neq 0$.

# Exemples

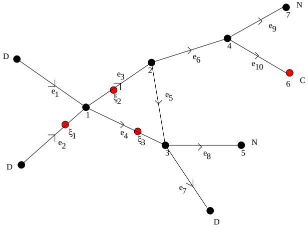



Dans ce cas, $\forall j,\ l_j = 1$, $\lim E(t) = 0$ et le problème est polynomialement stable si $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \in \mathcal{S}$.

# Exemples




Si $\forall j,\ l_j = 1$, alors le problème est exponentiellement stable.




Si $\forall j,\ l_j = 1$, et si $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in S$, alors le problème est polynomialement stable en $\frac{1}{1+t}$.

# Plan

# Le problème

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) + B_2 B_2^* \dot{\omega}(t - \tau(t)) = 0, \ t > 0, \\ \omega(0) = \omega_0, \ \dot{\omega}(0) = \omega_1, \\ B_2^* \dot{\omega}(t - \tau(0)) = f^0(t - \tau(0)), \ 0 < t < \tau(0), \end{cases} \tag{13}$$

où

- $\omega : [0, \infty) \to H$ est l'état du système, $H$ est un espace de Hilbert réel,
- $\tau(t) > 0$ est le retard dépendant du temps,
- $A : D(A) \to H$ un opérateur auto-adjoint, positif avec inverse compact dans $H$, et $D(A)$ dense dans $H$,
- $U_1$, $U_2$ sont des espaces de Hilbert réels (que l'on identifie à leur dual) munis de $\|.\|_{U_i}$ et $B_i \in \mathcal{L}(U_i, D(A^{1/2})')$. On note $V = D(A^{1/2})$.

# Exemple: L'équation des ondes avec damping au bord

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\, t) - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\, t) = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0, \\ a\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,\, t) = -\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t}(\pi,\, t) - \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial t}(\pi,\, t - \tau(t)), & t > 0, \\ u(x,\, 0) = u^0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\, 0) = u^1(x), & 0 < x < \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\pi,\, t - \tau(0)) = f^0(t - \tau(0)), & 0 < t < \tau(0), \end{cases} \tag{14}$$

Ici :

- $A : D(A) \to H,\ \varphi \mapsto -a\,\frac{d^2}{dx^2}\varphi\ (a > 0)$ avec $H = L^2(0,\pi)$, $D(A) = \{\varphi \in H^2(0,\pi) \cap V;\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\pi) = 0\}$, et $V = \{\varphi \in H^1(0,\pi);\ \varphi(0) = 0\}$,
- Pour $i = 1, 2$, $U_i = \mathbb{R}$, $B_i : U_i \to V'$, $k \mapsto \sqrt{\alpha_i}\, k\, \delta_\pi$ et donc $B_i^*(\varphi) = \sqrt{\alpha_i}\varphi(\pi)$ pour $\varphi \in V$.

# Hypothèses sur le retard

On suppose que le retard satisfait

$$0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq M, \quad \forall\ t > 0, \tag{15}$$

$$\tau'(t) \leq d < 1, \quad \forall\ t > 0, \tag{16}$$

et

$$\tau \in W^{2,\infty}([0, T]), \quad \forall\ T > 0. \tag{17}$$

# La principale difficulté avec un retard dépendant du temps

Pour prouver la stabilité exponentielle dans le cas où le retard est constant (ou sans retard), on a utilisé une inégalité d'observabilité pour les solutions du système conservatif du type:

$$\exists T > 0,\ \exists C_T > 0,\ E(0) \leq C_T \int_0^T \|(B_1^* \phi)'(t)\|_{U_1}^2 \, dt.$$

Ceci implique la décroissance exponentielle de l'énergie puisque le système est invariant par translation en temps.
Pour un retard dépendant du temps, cette méthode ne peut pas s'appliquer car le système n'est plus invariant par translation en temps
$\rightsquigarrow$ autre méthode : fonctionnelle de Lyapunov.
Quelques références :

- Fridman, Orlov 2009
- Nicaise, Pignotti 2011, Pignotti 2012
- Gugat 2010, Gugat, Tucsnak 2011

# Choix des poids

Nous avons vu dans notre exemple que, si le retard est constant,

- si $\alpha_1 = 0$, le système est instable [Dakto-Lagnese-Polis, 1986],
- si $\alpha_2 \geq \alpha_1$, des instabilités peuvent apparaître [Nicaise-Pignotti, 2006, Nicaise-V., 2007],
- mais si $\alpha_2 < \alpha_1$, le système est dissipatif.

On avait alors supposé

$$\exists\, 0 < \alpha \leq 1, \forall u \in V, \left\| B_2^* u \right\|_{U_2}^2 \leq \alpha \left\| B_1^* u \right\|_{U_1}^2 .$$

Ici, avec un retard dépendant du temps, on impose:

**Condition entre $B_1^*$ et $B_2^*$**

$$\exists\, 0 < \alpha \leq \sqrt{1-d}, \forall u \in V, \left\| B_2^* u \right\|_{U_2}^2 \leq \alpha \left\| B_1^* u \right\|_{U_1}^2 . \tag{18}$$

Exemple : $\alpha_2 \leq \sqrt{1-d}\,\alpha_1$.

# Transformation du système

On pose $z(\rho,\ t) = B_2^*\dot{\omega}(t - \tau(t)\rho)$ pour $\rho \in (0,\ 1)$ et $t > 0$. Le système (13) est équivalent à

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + B_1B_1^*\dot{\omega}(t) + B_2z(1,\ t) = 0,\ t > 0, \\ \tau(t)z_t(\rho, t) + (1 - \dot{\tau}(t)\rho)z_\rho(\rho, t) = 0,\ t > 0,\ 0 < \rho < 1, \\ \omega(0) = \omega_0,\ \dot{\omega}(0) = \omega_1,\ z(\rho,\ 0) = f^0(-\tau(0)\rho),\ 0 < \rho < 1, \\ z(0,\ t) = B_2^*\dot{\omega}(t),\ t > 0. \end{cases}$$

Si on pose

$$U = (\omega,\ \dot{\omega},\ z)^T,$$

alors $U$ satisfait

$$U' = (\dot{\omega},\ \ddot{\omega},\ \dot{z})^T = \left(\dot{\omega},\ -A\omega(t) - B_1B_1^*\dot{\omega}(t) - B_2z(1,\ t),\ \frac{\dot{\tau}(t)\rho - 1}{\tau(t)}z_\rho\right)$$

# Système du 1er ordre

Le système (13) peut se réécrire comme

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}(t)U(t) \\ U(0) = (\omega_0, \omega_1, f^0(., -.\tau(0)))^T, \end{cases} \tag{19}$$

où l'operateur $\mathcal{A}(t)$ dépend du temps et est défini par

$$\mathcal{A}(t)\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -A\omega - B_1B_1^*u - B_2z(1) \\ \frac{\dot{\tau}(t)\rho - 1}{\tau(t)} z_\rho \end{pmatrix},$$

avec domaine (indépendant du temps)
$D(\mathcal{A}(t)) = \{(\omega,\, u,\, z) \in V \times V \times H^1((0,\,1),\, U_2);\; z(0) = B_2^*u,$
$A\omega + B_1B_1^*u + B_2z(1) \in H\}$. On introduit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = V \times H \times L^2((0,\,1),\, U_2).$$

# Problème bien posé

**Théorème (Fridman, Nicaise, V. 2010)**

*Supposons (18). Pour toute donnée initiale $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(0))$, il existe une unique solution $U \in C([0,+\infty), D(\mathcal{A}(0))) \cap C^1([0,+\infty), \mathcal{H})$ de (19).*

Proof: Nous utilisons un théorème de Kato et nous prouvons, pour $t > 0$ fixé:

- $\mathcal{A}(t)$ est dissipatif, ie $\forall U \in D(\mathcal{A}(t)), \langle \mathcal{A}(t)U,\ U\rangle_t \leq 0$,
- $\forall \lambda > 0, \lambda I - \mathcal{A}(t)$ est surjectif,
- $\frac{\|\phi\|_t}{\|\phi\|_s} \leq e^{\frac{c}{2\tau_0}|t-s|}, \forall t,\ s \in [0,\ T]$
- $\partial_t \mathcal{A} \in L^\infty_*([0,\ T],\ B(Y,\ \mathcal{H}))$.

# Energie

Supposons

$$\exists\, 0 < \alpha < \sqrt{1-d},\ \forall u \in V,\ \|B_2^* u\|_{U_2}^2 \leq \alpha \|B_1^* u\|_{U_1}^2 . \qquad (20)$$

On définit l'énergie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}\omega\right\|_H^2 + \|\dot{\omega}\|_H^2 + q\tau(t)\int_0^1 \|B_2^*\dot{\omega}(t-\tau\rho)\|_{U_2}^2\, d\rho\right),$$

où $q > 0$ satisfait $\frac{1}{\sqrt{1-d}} < q < \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{1-d}}$.

**Proposition**

*Pour toute solution régulière de (13), l'énergie est décroissante et il existe $C > 0$ (dépendant seulement de $\alpha$, $d$ et $q$) tel que*

$$E'(t) \leq -C\left(\|B_1^*\dot{\omega}(t)\|_{U_1}^2 + \|B_2^*\dot{\omega}(t-\tau(t))\|_{U_2}^2\right).$$

<u>Exemple</u> : (20) est équivalent à $\alpha_2 < \sqrt{1-d}\,\alpha_1$.

# La méthode: fonctionnelle de Lyapunov

Comme le système n'est pas invariant par translation en temps, on ne peut pas utiliser une inégalité d'observabilité pour obtenir la stabilité du système. Nous utilisons une autre méthode et on introduit la fonctionnelle de Lyapunov abstraite suivante:

$$\mathcal{E}(t) = E(t) + \gamma\left((\mathcal{M}\omega(t), \dot{\omega}(t))_H + \mathcal{E}_2(t)\right), \tag{21}$$

où $\gamma$ est une constante positive que l'on choisira assez petite par la suite, et $\mathcal{E}_2(t)$ est définie par

$$\mathcal{E}_2(t) := q\tau(t)\int_0^1 e^{-2\delta\tau(t)\rho}\,\|B_2^*\dot{\omega}(t-\tau(t)\rho)\|_{U_2}^2\,d\rho \quad (\delta > 0). \tag{22}$$

# Fonctionnelle de Lyapunov

De plus, on suppose que l'opérateur $\mathcal{M} : V \to H$ satisfait les hypothèses suivantes

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{M}\omega(t), \dot{\omega}(t)\right)_H \leq -C_0 E_0(t) + C_1 \left\|B_1^* \dot{\omega}(t)\right\|_{U_1}^2 + C_2 \left\|B_2^* \dot{\omega}(t-\tau(t))\right\|_{U_2}^2, \tag{23}$$

où $E_0(t) := \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}\omega(t)\right\|_H^2 + \|\dot{\omega}(t)\|_H^2\right)$, et

$$\exists C > 0, \forall t > 0, \quad \left|(\mathcal{M}\omega(t), \dot{\omega}(t))_H\right| \leq CE_0(t). \tag{24}$$

Notons que $\mathcal{E}$ est équivalente à l'énergie $E$:

$$\forall t > 0, \quad (1 - C\gamma)E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq C_3(\gamma)E(t).$$

<u>Exemple:</u> Pour l'équation des ondes 1d, on prend ([Nicaise, V., Fridman 2009])

$$\mathcal{M}u = 2x\,\frac{\partial u}{\partial x}.$$

# Le résultat de stabilité

**Lemme**

*Supposons (16). Alors* $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_2(t) \leq -2\delta\mathcal{E}_2(t) + q\left\|B_2^*\dot{\omega}(t)\right\|_{U_2}^2.$

On peut en déduire l'estimée de stabilité exponentielle pour (13).

**Théorème (Fridman, Nicaise, V. 2010)**

*Sous les hypothèses précédentes, il existe des constantes positives* $K, \nu$ *tels que toute solution du système (13) satisfait*

$$E(t) \leq KE(0)e^{-\nu t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{25}$$

**Remarque**

*Le taux de décroissance est donné par* $\nu_{max} = \frac{\gamma}{C_3(\gamma)} \min\left(C_0, \frac{2}{Me}\right).$

# L'équation des ondes multidimensionnelle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ un ouvert borné avec un bord $\Gamma$ de classe $C^2$, tel que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, avec $\overline{\Gamma}_D \cap \overline{\Gamma}_N = \emptyset$ et $\Gamma_D \neq \emptyset$. De plus $\Gamma_N^2 \subseteq \Gamma_N^1 = \Gamma_N$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{on} \quad \Gamma_D \times (0,+\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\chi_{\Gamma_N^1} - \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t-\tau(t))\chi_{\Gamma_N^2} & \text{on} \quad \Gamma_N \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{in} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t-\tau(0)) = f_0(x,t-\tau(0)) & \text{in} \quad \Gamma_N^2 \times (0,\tau(0)), \end{array} \right. \tag{26}$$

On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que, en notant par $m$ le multiplicateur $m(x) := x - x_0$, on a

$$\begin{array}{l} m(x)\cdot\nu(x) \leq 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_D \\ m(x)\cdot\nu(x) \geq \delta > 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_N. \end{array}$$

# L'équation des ondes multidimensionnelle

Ici :

- $A : D(A) \to H,\ \varphi \mapsto -\Delta\varphi$ avec $H = L^2(\Omega)$,
  $D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega) \cap V\ :\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N\}$ et $V = H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$,
- Pour $i = 1, 2,\ U_i = L^2(\Gamma_N^i)$,

$$B_i^* : V \to U_i,\ k \mapsto \sqrt{\alpha_i}\, \varphi_{|\Gamma_N^i}.$$

On suppose $0 < \alpha_2 < \sqrt{1-d}\, \alpha_1$. Le système est alors bien posé.

# L'équation des ondes multidimensionnelle

On choisit $\mathcal{M} : V \to H$ par

$$\mathcal{M}u = 2m \cdot \nabla u + (n-1)u. \tag{27}$$

Cet opérateur $\mathcal{M}$ satisfait les hypothèses précédentes. Par conséquent, notre cadre abstrait s'applique et le système (26) est exponentiellement stable sous les hypothèses précédentes.

# Amélioration [Nicaise-Pignotti-V., 2011]

On suppose seulement $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}, \quad \forall t > 0$. On prend

$$\tau_\epsilon(t) = \tau(t) + \epsilon, \quad \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Alors, il existe une solution unique
$U_\epsilon = (u^\epsilon, v^\epsilon, z^\epsilon)^T \in C([0, +\infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}_\epsilon(t))) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H})$, de

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\epsilon' = \mathcal{A}_\epsilon(t) U_\epsilon \\ U_\epsilon(0) = (u_0, u_1, f_0(\cdot, - \cdot \tau_\epsilon(0)))^T = U_{\epsilon,0} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\epsilon(0)), \end{array} \right. \tag{28}$$

où $\mathcal{A}_\epsilon(t)$ est défini par

$$\mathcal{A}_\epsilon(t) \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \\ \frac{\tau_\epsilon'(t)\rho - 1}{\tau_\epsilon(t)} z_\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \\ \frac{\tau'(t)\rho - 1}{\tau(t) + \epsilon} z_\rho \end{pmatrix},$$ avec domaine

$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\epsilon(t)) = \mathcal{D}(\mathcal{A}(t))$. Le but est alors de prendre la limite de $(u_\epsilon)_{0<\epsilon<\epsilon_0}$ quand $\epsilon$ tend vers 0. Pour des données initiales plus régulières, avec $(1-d)(1-\tau'_{min}) \leq 2$, on obtient l'existence/unicité des solutions.

# Plan

# Conclusion

- Etude de la stabilisation de différents systèmes d'évolution
  - équations des ondes, des poutres, des plaques
  - sur des réseaux
  - par des feedbacks non bornés ou bornés.
- Retard constant ou dépendant du temps.
- Sous des hypothèses sur le retard et sur les poids
- Influence du retard

# Problèmes ouverts

- Stabilisation interne ou sur des réseaux de l'équation des ondes avec un retard dépendant du temps.
- Supprimer l'hypothèse $0 < \tau_0 \leq \tau(t)$ en général.
- Nécessité de $\dot{\tau}(t) < 1$ ?
- Avec $\alpha_1 = 0$ et à un retard fixé, peut on trouver un feedback (par exemple un poids $\alpha_2$, qui peut être négatif), pour lequel on a la stabilité du système à retard ?